第 2 卷 第 7 期
1997 年 7 月
中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics
Vol. 2, No. 7
Jul. 1997

Mandelbrot 集与 Julia 集的图象生成算法

李奕彪　　　　李　东
（中科院沈阳自动化研究所，计算中心　110015）（沈阳药科大学，计算机系　110015）

摘　要　介绍一种在计算机上生成 Mandelbrot 集和 Julia 集图象的简易算法。该算法对计算机的软硬件要求均不高，在普通的微机以及工作站上均可实现。

关键词　Mandelbrot 集，Julia 集，分形

1　引　言

分形几何学是一门新兴的学科。分形(fractal)一词来源于拉丁文的 Fractus，它是由分形几何学的创始人 B. Mandelbrot 在 1975 年拼造的新词，该词具有分数，分级的含义，同时具有碎片，不规则的含义。

分形几何学研究的主要内容是非整数的维数—Hausdoff-Besivovitch 维数[1]。近年来，分形几何学的研究，对数学及许多科学领域均产生了重大的影响[2]。非常有趣的是，某些社会上的经济现象，在某种意义下也是符合分形的规律的。

本文介绍典型的分形-Mandelbrot 集与 Julia[3] 集的生成算法，有兴趣的读者可以根据本文的算法随意生成自己感兴趣的图形图象。

2　Mandelbrot 集与 Julia 集

考虑复数域上的非线形函数：

$F(z)=z*z+u$ (z,u 属于复数域)

由此函数构成一个迭代序列：$z_{n+1}=z_n^2+u$，首先，考虑 $u=0$ 的情形，此时的迭代序列为：$z_0\to z_0^2\to z_0^4\to z_0^8\cdots\cdots$。

可以看出，此序列具有如下特点：

(1)当 $|z|<1$ 时，序列中的数按复数取模的值越来越小，并且趋于 0。这时，称 0 为映射 $z\to z^2$ 的吸引子，区域 $|z|<1$ 为 0 的吸引区域。

(2)当 $|z|>1$ 时，序列中的数按复数取模的值越来越大，并且趋于∞。这时，称∞为映射 $z\to z^2$ 的吸引子，区域 $|z|>1$ 为∞的吸引区域。

(3)当 $|z|=1$ 时，序列中的数都分布在上述两个吸引区域的边界上，这个边界很容易看出是复平面上的单位圆周。

当 $u\neq 0$ 时，0 不再是映射：$z\to z^2+u$ 的吸引子，而且吸引区域的边界也不再是光滑的圆周，而是一个具有自相似结构的皱曲的图形，这种图形经过任意次放大之后，仍然是皱曲的。任取其中的一段边界时，这个边界的形状会在另外的地方以不同的尺寸出现，这类具有自相似结构的边界在数学上称作 Julia 集；在复平面上，使映射：$z\to z^2+u$ 的吸引边界为有界的复参数 u 的集合，在数学上称为 Mandelbrot 集。

3　图象的生成算法

对于复映射：$z\to z^2+u$

其迭代过程为：$z_{n+1}=z_n{}^2+u$

记 $z=x+iy$，$u=p+iq$

则可得：$x_{n+1}+iy_{n+1}=(x_n+iy_n)^2+p+iq$

由此可得：

$x_{n+1}=x_n{}^2-y_n{}^2+p$；$y_{n+1}=2x_ny_n+q$

通过上述两个等式，可以引申出 Julia 集和 Mandelbrot 集的图象生成算法。

3.1　Julia 集图象的生成算法

(1) 初始化

假定屏幕或者显示图象的窗口的分辨率为

$a*b$,图象按照 $K+1$ 种颜色进行显示,颜色值为 0,1,2,…,K。x 和 y 的取值范围分别为:$-1.5<x,y<1.5$,最大的迭代步数为 100,迭代步长为:

$$dx=(x_{\max}-x_{\min})/(a-1);$$
$$dy=(y_{\max}-y_{\min})/(b-1)$$

对屏幕或显示窗口上的所有点(n_x,n_y),$n_x=0,1,2,\cdots,a-1$;$n_y=0,1,2,\cdots,b-1$,完成以下循环。

(2) 循环初始化

令 $x_0=x_{\min}+n_x*dx;y_0=y_{\min}+n_y*dy;k=0$

(3) 迭代

$x_{k+1}=x_k^2-y_k^2+p;\ y_{k+1}=2x_ky_k+q;k=k+1$

(4) 迭代循环控制

计算模:$r=x_k^2+y_k^2$

如果 $r>M$,则选择颜色 k,转第 5 步。

如果 $k=K$,则选择颜色 0,转第 5 步。

如果 $r<=M$,并且 $k<K$,转第 2 步。

(5) 象素点循环

对点(n_x,n_y)着颜色 k,并且选择下一个象素点,转第 2 步。

3.2 Mandelbrot 集图象的生成算法

(1) 初始化

假定屏幕或显示窗口的分辨率为 $a*b$,按照 $K+1$种颜色进行显示,颜色分别为 0,1,2,…,K。p 和 q 的取值范围分别为 $-2.25<p<0.75$;$-1.5<q<1.5$。迭代步数为 100。迭代步长为:

$$dp=(p_{\max}-p_{\min})/(a-1);$$
$$dq=(q_{\max}-q_{\min})/(b-1)$$

对屏幕上的所有点(n_p,n_q),$n_p=0,1,2,\cdots,a-1$;$n_q=0,1,\cdots b-1$,完成以下循环。

(2) 循环初始化

令 $p_0=p_{\min}+n_p*dp;q_0=q_{\min}+n_q*dq;k=0;$
$x_0=y_0=0$

(3) 迭代

$x_{k+1}=x_k^2-y_k^2+p_j;y_{k+1}=2x_ky_k+q_j;k=k+1$

(4) 迭代循环控制

计算模:$r=x_k^2+y_k^2$

如果 $r>M$,则选择颜色 k,转第 5 步。

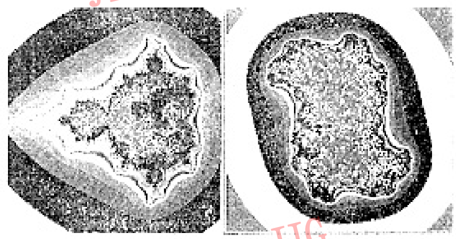
如果 $k=K$,则选择颜色 0,转第 5 步。

如果 $r<=M$,并且 $k<K$,转第 2 步。

(5) 象素点循环

对点(n_p,n_q)着颜色 k,并且选择下一个象素点,转第 2 步。

4 算法图例



Mandelbort 集图形　　Julia 集图形

这里所提供的两个图例是笔者在 SGI 图形工作站上用 C 语言编程绘制出来的。

参考文献

1 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature, New York: W. H. Freeman and Co. , 1982.
2 Peitgen H O, Saupe D. The Science of Fractal Images, New York:Springer-Verlag,1989.
3 齐东旭,梁振珊,马驷良. 图形及其计算机探索. 吉林:吉林大学出版社,1988.

李奕彪,中国科学院沈阳自动化研究所助理研究员,1988 年和 1991 年分获吉林大学理学学士和硕士学位。主要研究领域包括计算机图形学,多媒体应用,计算机网络等。

A Simple Algorithm for Mandelbrot Set and Julia Set Drawing

Li Yibiao

(Computer Centry, Shengyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shengyang　110015)

Lidong

(Computer Department, ShenYang Pharmaceutical University, Shengyang　110015)

Abstract　This paper introduce a sort of simple Algorithm for Julia set and Mandelbrot set drawing. It don't require high-performance computers, but can be realized on common computers.

Keywords　Mandelbrot set, Julia set, Fractal

(上接 505 页)

参考文献

1　Wendt P D, Coyle E J, Gallagher C. Stack filters. IEEE Trans. 1986. 8, ASSP-34, (4): 898～911.

2　Akopian D, Vainio O, Agaian S, Astola J. Processors for generalized stack filters. IEEE Trans. 1995. 6, SP-43(6): 1541～1546.

王 伟，哈尔滨工业大学自动测试与控制系博士研究生。1996 年获哈尔滨工程大学电子工程系信号处理专业硕士学位。研究方向为：计算机图象处理与模式识别，非线性滤波。

Stack Weighted Median Filter

Wang Wei , Zhao Chunhui

(Dept, of Automatic Test and Control of HIT, Haerbin　150001)

Abstract　Taking advantage of the threshold decomposition property of stack filter, a stack weighted median filter is presented based on the threshold decomposition architecture. It allows parallel process and VLSI implementation, and is effective in the application of image process.

Keywords　Threshold decomposition, Stack filtering, Weighted median filtering